

ブラウン運動により生成される円周上の非対称確率分布

加藤 昇吾 数理・推論研究系 助教

ブラウン運動と確率分布

はじめに

円周上の確率分布として知られる wrapped Cauchy 分布は、単位円盤上の点を出発した平面上ブラウン運動の粒子が、単位円にぶつかる場所の分布として導かれる。

本報告では、このブラウン運動の問題を一般化することで、wrapped Cauchy 分布を特別な場合として含む非対称確率分布を提案する。

分布の定義 (Kato & Jones, revised)

$\{B_t; t \geq 0\}$: 複素平面 \mathbb{C} 上ブラウン運動,

$B_0 = \xi$ ($\in \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$),

$\tau_1 = \inf\{t \geq 0; |B_t| = 1\}$,

$\tau_2 = \inf\{t \geq 0; |B_t| = r, r > 1\}$.

とする。このとき,

$B_{\tau_2} = re^{i\mu}$ を所与としたときの B_{τ_1} の条件付き分布

を新たな確率分布として提案する。ここに、 $-\pi \leq \mu < \mu$.

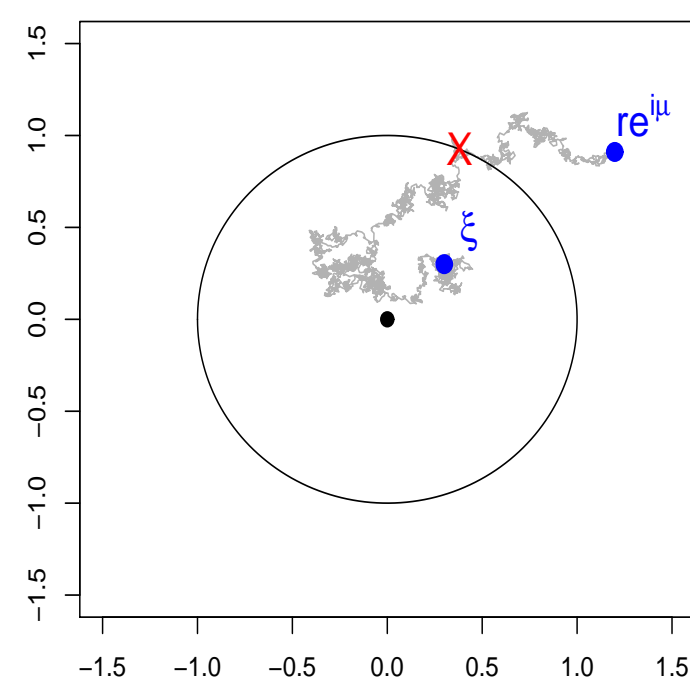


図 1. ブラウン運動により生成される確率分布.

確率分布の性質

以後便利のため、 $Z = B_{\tau_1}$, $(\phi_1, \phi_2) = (\xi, r^{-1}e^{i\mu})$ と表すこととする。ここで、 i は虚数をあらわす ($i^2 = -1$)。

確率密度関数

$B_{\tau_2} = 1/\overline{\phi_2}$ ($= re^{i\mu}$) を所与としたときの Z の条件付き密度関数は,

$$f(z; \phi_1, \phi_2) = \frac{1}{2\pi} \frac{|1 - \phi_1 \overline{\phi_2}|^2}{1 - |\phi_1 \overline{\phi_2}|^2} \frac{1 - |\phi_1|^2}{|z - \phi_1|^2} \frac{1 - |\phi_2|^2}{|z - \phi_2|^2}, \quad z \in \partial D, \quad (1)$$

で与えられる。ここで、 $\phi_1, \phi_2 \in D$ ($= \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$), $\partial D = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$.

特に、 $\phi_1 = 0$ または $\phi_2 = 0$ のとき、密度関数 (1) は wrapped Cauchy 分布の密度関数と等しくなる。

密度関数の形

- 密度関数 (1) は、パラメータ ϕ_1, ϕ_2 のとり方により、対称か非対称、一山型か二山型となる。

- 密度関数 (1) が対称

$$\iff |\phi_1| = |\phi_2|, \phi_j = 0 \text{ or } \arg(\phi_1 \overline{\phi_2}) = (j-1)\pi \quad (j=1, 2).$$

- 密度関数 (1) が一山型となる条件は、 $|\phi_1|, |\phi_2|, \arg(\phi_1 \overline{\phi_2})$ の不等式で表すことができる。

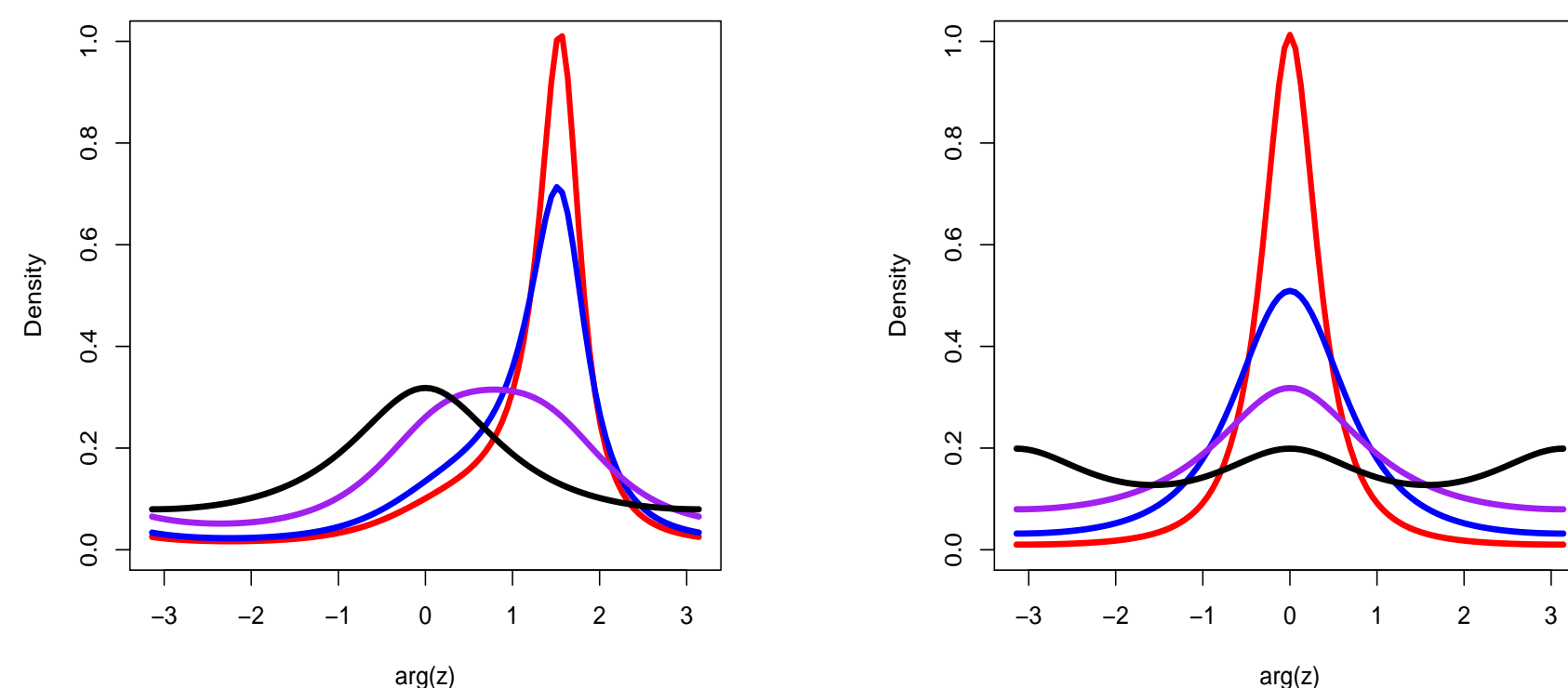


図 2. 密度関数 (1) のプロット.

(左) $\phi_1 = 1/3$, $\arg(\phi_2) = \pi/2$, $|\phi_2| = 0, 1/3, 2/3, 3/4$.

(右) $\phi_1 = 1/3$, $\phi_2 = -1/3, 0, 1/3, 2/3$.

極限分布

確率変数 Z が確率分布 (1) に従っているとする。

また、 $\phi_j = \rho_j e^{i\mu_j}$, $\rho_j \in [0, 1)$, $\mu_1 = \mu_2 \in [-\pi, \pi)$ ($j=1, 2$) と仮定する。このとき,

$$\frac{\sqrt{\rho_1}}{1 - \rho_1} \{\arg(Z) - \mu_1\} \xrightarrow{d} \begin{cases} \text{standard Cauchy,} & \rho_1 \neq \rho_2, \\ t\text{-dist. with } \sqrt{3} \text{ d.o.f.'s,} & \rho_1 = \rho_2, \end{cases} \text{ as } \rho_1 \rightarrow 1.$$

Fourier coefficients

確率変数 Z が確率分布 (1) に従っているとき,

$$E(Z^n) = \begin{cases} \frac{|1 - \phi_1 \overline{\phi_2}|^2}{1 - |\phi_1 \overline{\phi_2}|^2} \left(\frac{\overline{\phi_1} \phi_2^{n+1}}{1 - \phi_1 \overline{\phi_2}} + \frac{\phi_1^{n+1} \overline{\phi_2}}{1 - \phi_1 \overline{\phi_2}} + \frac{\phi_1^{n+1} - \phi_2^{n+1}}{\phi_1 - \phi_2} \right), & \phi_1 \neq \phi_2, \\ \frac{1 + n + (1 - n)|\phi_1|^2}{1 + |\phi_1|^2} \phi_1^n, & \phi_1 = \phi_2, \end{cases}$$

が成立する ($n \in \mathbb{N}$)。また、この結果より、以下がただちに導かれる。

$$E(Z) = 0 \iff \phi_1 = -\phi_2.$$

conformal invariance

メビウス変換 $g: \partial D \rightarrow \partial D$ は,

$$g(w) = \alpha \frac{w + \beta}{\beta w + 1}, \quad w \in \partial D; \quad \alpha \in \partial D, \beta \in D.$$

で定義される。このとき、密度関数 (1) に対して次が成り立つ。

$$f(z; \phi_1, \phi_2) = f\{g(z); g(\phi_1), g(\phi_2)\} |g'(z)|^2.$$

References

- [1] KATO, S. & JONES, M.C. An extended family of circular distributions related to wrapped Cauchy distributions via Brownian motion, revised.